

Exercice 4 7 points**Thèmes : géométrie dans l'espace**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

- la droite \mathcal{D} passant par le point $A(2; 4; 0)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;
 - la droite \mathcal{D}' dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 + t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$
- a.** Donner les coordonnées d'un vecteur directeur \vec{u}' de la droite \mathcal{D}' .
 - b.** Montrer que les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' ne sont pas parallèles.

- c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite \mathcal{D} .

On admet dans la suite de cet exercice qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' . Cette droite Δ coupe chacune des droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' . On appellera M le point d'intersection de Δ et \mathcal{D} , et M' le point d'intersection de Δ et \mathcal{D}' .

On se propose de déterminer la distance MM' appelée « distance entre les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' ».

2. Montrer que le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite Δ .
3. On note \mathcal{P} le plan contenant les droites \mathcal{D} et Δ , c'est-à-dire le plan passant par le point A et de vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v} .
- a. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P} .
- b. En déduire qu'une équation du plan \mathcal{P} est : $2x - y - 5z = 0$.
- c. On rappelle que M' est le point d'intersection des droites Δ et \mathcal{D}' .
Justifier que M' est également le point d'intersection de \mathcal{D}' et du plan \mathcal{P} .
En déduire que les coordonnées du point M' sont $(3; 1; 1)$.
4. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .
- b. Justifier que le point M a pour coordonnées $(1; 2; 0)$.
- c. Calculer la distance MM' .
5. On considère la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5t \\ y = 2 + 5t \\ z = 1 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
- a. Montrer que la droite d est parallèle au plan \mathcal{P} .
- b. On note ℓ la distance d'un point N de la droite d au plan \mathcal{P} .
Exprimer le volume du tétraèdre $ANMM'$ en fonction de ℓ .
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3} \times B \times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.
- c. Justifier que, si N_1 et N_2 sont deux points quelconques de la droite d , les tétraèdres AN_1MM' et AN_2MM' ont le même volume.